II. ECUACIONES:

Una ecuación es una igualdad en la cual hay términos conocidos y términos desconocidos. El término desconocido se llama incógnita y se representa generalmente por las últimas letras del abecedario: "x", "y" o "z", aunque puede utilizarse cualquiera otra letra.

Ejemplos de ecuaciones:

$$36 + x = -12$$

$$115 = 4x - 41$$

$$x + 124 = 70 - 2$$

$$5x + 3y - 4 = 0$$

$$5 - ab = ax - by$$

$$2x + 8 = 3x - 12$$

$$0 = 3xy + 3x - 5$$

$$2/3x \div 4/7y = -28$$

En estos ejemplos puede observarse lo siguiente:

Hay una expresión escrita a la izquierda del signo igual y hay una expresión escrita a la derecha del signo igual. La que está antes del signo igual recibe el nombre de primer miembro, la expresión que está a la derecha del signo igual se llama segundo miembro.

En una ecuación puede haber más de una incógnita; es decir, más de un valor desconocido.

Una incógnita puede tener como exponente al número 1 ($x^1 = x$), al número 2 (X^2), al número 3 (X^3), al número 4 (X^4), etc. El exponente indica el grado de la ecuación. Debe leerse "equis elevado a uno, equis elevado a dos, etc."

¿Cuándo está resuelta una ecuación?

Una ecuación está resuelta cuando se ha encontrado el valor o los valores de la o las incógnitas que hacen verdadera la igualdad. Este valor recibe el nombre de raíz o solución.

Aunque la palabra “ecuación” significa “igualación” o “igualdad”, se usa para distinguir este tipo de igualdades de las identidades, generalmente cuando se habla de ecuaciones, nos referimos a igualdades que hay que *resolver*; resolver una ecuación significa encontrar el valor o los valores que debemos asignar a las literales para que la igualdad sea verdadera.

A las literales de la ecuación las llamaremos “incógnitas”

Las ecuaciones se clasifican de acuerdo con las literales que aparecen y el grado de los polinomios que intervienen en ella, por ejemplo:

$x + 3 = 2x + 7$ es una ecuación de primer grado con una incógnita
$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ es una ecuación de segundo grado con dos incógnitas
$x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$ es una ecuación de tercer grado con una incógnita

En este recurso nos centraremos únicamente en la solución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita, una vez que aprendamos a resolver este tipo de ecuaciones será más fácil enfrentar ecuaciones de grado mayor y/o con más incógnitas.

EJEMPLOS

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Recordar:

- Una **ecuación** es una igualdad algebraica en la que aparecen letras (incógnitas) con valor desconocido.
- El **grado de una ecuación** viene dado por el exponente mayor de la incógnita. En este tema trabajamos con ecuaciones lineales (de grado 1) con una incógnita.
- **Solucionar** una ecuación es encontrar el valor o valores de las incógnitas que transforman la ecuación en una identidad.
- Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.
- Para conseguir ecuaciones equivalentes, sólo se puede aplicar alguna de las siguientes propiedades:
  Propiedad 1: Sumar o restar a las dos partes de la igualdad una misma expresión.
  Propiedad 2: Multiplicar o dividir las dos partes de la igualdad por un número diferente de cero.

Ejercicios de autoaprendizaje:

1. Resolvemos algunas ecuaciones:

Procedimiento para resolver una ecuación de 1r grado:

- Eliminar denominadores: multiplicando ambas partes de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores. (Propiedad 2)
- Eliminar paréntesis. (Propiedad distributiva)
- Transposición de términos. Conseguir una ecuación de la forma $a \cdot x = b$. (Propiedad 1).
- Despejar la incógnita. (Propiedad 2).
- Comprobar la solución.

a) $3(2x+5)-2(4+4x)=7$ lo primero que hacemos será las operaciones de los paréntesis
$6x+15-8-8x=7$ sumamos los términos en x y los términos independientes
$-2x+7=7$ transponemos los términos
$-2x=7-7 \Rightarrow -2x=0$ despejamos la incógnita $\Rightarrow \boxed{x=0}$
Comprobación:
Al sustituir en la ecuación $x=0$, transforma la ecuación en identidad:
$3(2\cdot 0+5)-2(4+4\cdot 0)=7 \Rightarrow 3\cdot 5-2\cdot 4=7$

b) $4-\frac{x+3}{6}=2+\frac{9-2x}{3} \Rightarrow$ Multiplicamos ambas partes de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores

$$6\cdot\left(4-\frac{x+3}{6}\right)=6\cdot\left(2+\frac{9-2x}{3}\right) \Rightarrow$$

$24-(x+3)=12+2(9-2x)$ eliminamos los paréntesis
$24-x-3=12+18-4x \Rightarrow 21-x=30-4x$ transponemos los términos
$4x-x=30-21 \Rightarrow 3x=9$ despejamos la incógnita $\Rightarrow \boxed{x=3}$
Comprobación:

$$4-\frac{3+3}{6}=2+\frac{9-2\cdot 3}{3} \Rightarrow 4-\frac{6}{6}=2+\frac{3}{3}$$

2. ¿Son equivalentes las siguientes ecuaciones?
   a) $x+5=8$ y $7x+1=22$
   Tenemos que resolver cada una de ellas y mirar si tienen la misma solución.
   Resolvemos la primera: $x=3$
   Resolvemos la segunda: $7x=21 \Rightarrow x=3$
   Como tienen la misma solución son ecuaciones equivalentes.

   b) $x+3=4$ y $8x+8=8$.
   Resolvemos la primera: $x=1$
   Resolvemos la segunda: $8x=0 \Rightarrow x=0$
   Como **no** tienen la misma solución **no son** ecuaciones equivalentes.

3. Problemas resueltos:

Procedimiento para resolver problemas de ecuaciones:
- Definición de la incógnita
- Traducir al lenguaje algebraico el enunciado.
- Planteamiento de la ecuación.
- Resolución de la ecuación.
- Ver si el resultado de la ecuación es coherente con el enunciado

a) Un número y su quinta parte suman 18. ¿Cuál es el número?
$x=$el número buscado. (definición de la incógnita)
Su quinta parte es $\frac{x}{5}$ (transformación al lenguaje algebraico).
$x+\frac{x}{5}=18$ (es el planteamiento de la ecuación).
Resolvemos la ecuación: $5x+x=90 \Rightarrow 6x=90 \Rightarrow x=\frac{90}{6} \Rightarrow$
Entonces, $x=15$
Notamos que al volver a leer el problema $x=15$ es coherente con el enunciado, 15 más 3 (su quinta parte) son18.

b) Perdí un tercio de las ovejas y llegué con 24. ¿Cuántas ovejas tenía?
$y=$número de ovejas que tenía.
Un tercio de las que tenía es $\frac{y}{3}$
El planteamiento será una resta: $y-\frac{y}{3}=24$
Resolvemos la ecuación: $3y-y=72 \Rightarrow 2y=72 \Rightarrow y=\frac{72}{2} \Rightarrow \boxed{y=36 \text{ ovejas}}$.
Notamos que el resultado es un número natural coherente con el enunciado.

c) En una tienda, de un producto me rebajaron el 15% y pagué 51 €. ¿Cuánto costaba el producto?

$a =$ precio en € del producto.

El 15% de a es $\frac{15}{100}a$

Lo que costaba el producto menos la rebaja es lo que pagué:

$a - \frac{15}{100}a = 51$

Resolvemos: $\frac{85}{100}\,a = 51 \;\Rightarrow\; a = \frac{51.100}{85} \;\Rightarrow\; a = 60\,€.$

El resultado es coherente con el enunciado el 15% de 60€ son 9€, entonces pagué 51€

d) Regala 8 cromos y se queda con la mitad. ¿Cuántos cromos tenía?

$x =$ número de cromos que tenía.

Si regala 8 tendrá $x - 8$, y dice que esta cantidad coincide con la mitad de los que tenía, es decir, $\frac{x}{2}$.

El planteamiento es: $x - 8 = \frac{x}{2}$.

Resolvemos: $2x - 16 = x \;\Rightarrow\; 2x - x = 16 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 16 \text{ cromos.}}$

Notamos que el resultado es un número natural coherente con el enunciado.

e) Hace 15 años la edad de Lusa era $\frac{2}{5}$ de la edad que tendrá dentro de 15 años. ¿Qué edad tiene ahora?

$x =$ edad actual de Luisa.

Fa 15 años tenia $x - 15$ años y d'ací 15 años tendrá $x + 15$.

El planteamiento es: $x - 15 = \frac{2}{5}(x + 15)$

Resolvemos: $5x - 75 = 2(x + 15) \;\Rightarrow\; 5x - 75 = 2x + 30 \;\Rightarrow\; 3x = 105 \;\Rightarrow$

$x = \frac{105}{3} \;\Rightarrow \boxed{x = 35 \text{ años es la edad actual de Luisa.}}$

El resultado es coherente con el enunciado. Si ahora Luisa tiene 35 años, dentro de 15 años Luisa tendrá 50 años, hace 15 años tenía 20 años que son dos quintas partes de 50.

Ejercicio:

Resuelve la siguiente ecuación:

$$2 - \frac{x-1}{3} = x + \frac{8-x}{2}$$

Multiplicamos ambas partes de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$6\left(2 - \frac{x-1}{3}\right) = 6\left(x + \frac{8-x}{2}\right) \;\Rightarrow$$

$$12 - 2(x-1) = 6x + 3(8-x)$$

Eliminamos paréntesis:

$$12 - 2x + 2 = 6x + 24 - 3x$$

Transponemos los términos:

$$-2x - 6x + 3x = 24 - 12 - 2 \;\Rightarrow\; -5x = 10$$

Despejamos la incógnita:

$$x = -2$$

Comprobación:

$$2 - \frac{-2-1}{3} = -2 + \frac{8-(-2)}{2} \;\Rightarrow\; 2 - \frac{-3}{3} = -2 + \frac{10}{2}$$

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Recuerda:

Una **ecuación de primer grado con dos incógnitas** es una expresión de la forma: $a \cdot x + b \cdot y = c$ tal que x, y son las incógnitas , a y b son los coeficientes y c el término independiente

Una solución de la ecuación es un par de valores reales que al sustituirlos por las incógnitas x, y, transformen la ecuación en una identidad.

Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tienen infinitas soluciones. La representación gráfica de estas soluciones es una **recta.**

Ejercicio:
Resuelve gráficamente y analíticamente la ecuación $3x - 2y = 6$

Notemos que si despejamos una incógnita las soluciones son infinitas y dependen del valor que demos a la otra incógnita.
Despejemos la incógnita y

$2y = 3x - 6$, entonces, $y = \dfrac{3x-6}{2}$

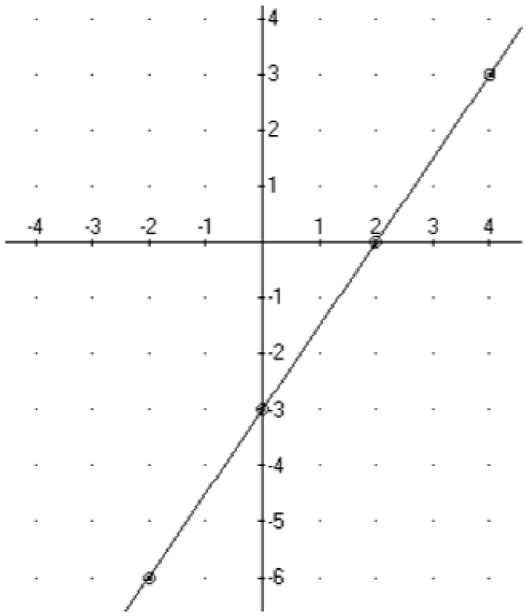
Las soluciones de la ecuación dependen de los valores que demos a la incógnita x.

Si le damos el valor a son: $\begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{3a-6}{2} \end{cases}$ Esta es la solución analítica.

Dando valores particulares a la incógnita x(–2,0,2,4) Construimos la tabla:

x	y
–2	-6
0	-3
2	0
4	3

Representamos los valores anteriores en el plano cartesiano. En el eje de abscisas los valores de la incógnita x. En el eje de ordenadas los valores de la incógnita y.



Recuerda:

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es un conjunto de ecuaciones de primer grado que se cumplen a la vez.

La expresión general es $\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ d \cdot x + e \cdot y = f \end{cases}$

Un sistema de ecuaciones lineales se puede resolver algebraicamente por tres métodos: Igualación, sustitución y reducción.

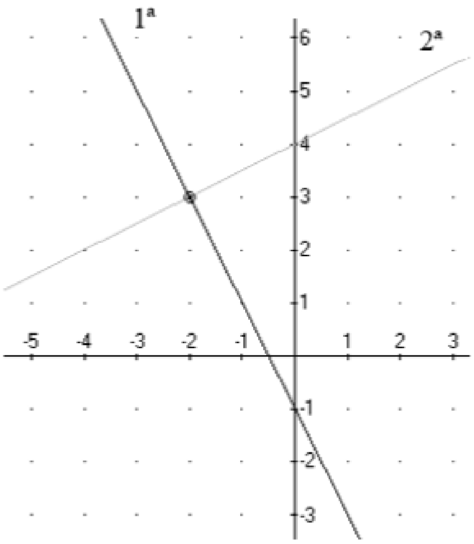
Un sistema de ecuaciones lineales se puede resolver gráficamente. Cada una de las ecuaciones, $y = m \cdot x + n$, representa una recta en el plano. Si el sistema tiene una solución las dos rectas se cortan en un punto que es la solución del sistema (x, y). Si son rectas coincidentes el sistema tiene infinitas soluciones, los infinitos puntos de la recta. El sistema no tiene solución si la rectas son paralelas.

Ejercicios:

1. Resuelve gráficamente el siguiente sistema: $\left.\begin{matrix} 2x + y = -1 \\ -x + 2y = 8 \end{matrix}\right\}$

Representaremos gráficamente cada una de las ecuaciones.
Despejaremos y de las dos ecuaciones para dejarlas en la forma $y = a \cdot x + b$

$$\left.\begin{matrix} 2x + y = -1 \\ -x + 2y = 8 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} y = -1 - 2x \\ 2y = 8 + x \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} y = -1 - 2x \\ y = \dfrac{8 + x}{2} \end{matrix}\right\}$$



La primera ecuación es la recta $y = -2x - 1$.
Dibujémosla dándole valores a la x para calcular la y correspondiente:

x	–1	1
y	1	–3

Los puntos $(-1, 1), (1, -3)$ determinan la recta

Análogamente dibujemos la recta $y = \dfrac{x + 8}{2}$

x	0	2
y	4	5

Los puntos $(0, 4), (2, 5)$ determinan la recta.
La solución es el punto de intersección de las dos rectas: (–2, 3). Es decir $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

Nota: un sistema lineal de dos incógnitas tiene solución única (compatible determinado) si las rectas se cortan en un punto. Tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado) si son la misma recta. El sistema no tiene solución (incompatible) si son paralelas.

2. Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación: $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-2y=5 \end{array}\right\}$

Despejamos en cada una de las ecuaciones la misma incógnita. Después igualamos las dos ecuaciones.

Despejamos la incógnita y de las dos ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} y=2-x \\ y=\dfrac{x-5}{2} \end{array}\right\}$ Igualamos las dos incógnitas: $\left.\begin{array}{l} 2-x=\dfrac{x-5}{2} \\ y=2-x \end{array}\right\}$

Resolvemos la primera ecuación con la incógnita x

$\left.\begin{array}{l} 4-2x=x-5 \\ y=2-x \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2-x \end{array}\right\}$

Sustituimos el valor de la incógnita x en la segunda ecuación:

$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2-3 \end{array}\right\}$ La solución del sistema es $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right\}$

Comprobación: veamos que los valores anteriores transforman las dos ecuaciones iniciales en identidades:

$\left.\begin{array}{l} 3+(-1)=2 \\ 3-2(-1)=5 \end{array}\right\}$

3. Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución: $\left.\begin{array}{l} 5x-y=0 \\ 3x+y=8 \end{array}\right\}$

De una ecuación despejamos una incógnita y sustituimos su valor en la otra ecuación.

De la primera ecuación despejamos la incógnita y:

$\left.\begin{array}{l} 5x-y=0 \\ 3x+y=8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y=5x \\ 3x+y=8 \end{array}\right\}$

Sustituimos el valor de la incógnita y en la segunda ecuación: $\left.\begin{array}{l} y=5x \\ 3x+5x=8 \end{array}\right\}$

Resolvemos la segunda ecuación con la incógnita x: $\left.\begin{array}{l} y=5x \\ 8x=8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y=5x \\ x=1 \end{array}\right\}$

Sustituimos el valor de la incógnita x en la primera ecuación: $\left.\begin{array}{l} y=5\cdot 1 \\ x=1 \end{array}\right\}$

La solución del sistema es: $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=5 \end{array}\right.$

4. Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción: $\left.\begin{array}{l} 2x=-10-6y \\ x-3y=7 \end{array}\right\}$

La misma incógnita de las dos ecuaciones tiene que tener los coeficientes opuestos.

Después sumaremos las ecuaciones. Escribimos el sistema anterior en forma general:

$\left.\begin{array}{l} 2x+6y=-10 \\ x-3y=7 \end{array}\right\}$

Queremos reducir la incógnita y. Multiplicamos la segunda ecuación por 2 (de esta forma los coeficientes serán opuestos).

$$\left.\begin{array}{l} 2x+6y=-10 \\ 2\cdot(x-3y)=2\cdot 7 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x+6y=-10 \\ 2x-6y=14 \end{array}\right\}$$

Sumemos las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+0y=4 \\ 2x+6y=-10 \end{array}\right\} \text{ (notemos que siempre mantenemos dos ecuaciones) } \left\{\begin{array}{l} 4x=4 \\ 2x+6y=-10 \end{array}\right.$$

Resolvemos la primera ecuación con la incógnita x:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ 2x+6y=-10 \end{array}\right\}$$

Sustituimos el valor de la incógnita x en la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ 2\cdot 1+6y=-10 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ 6y=-12 \end{array}\right\} \text{ La solución del sistema es: } \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \end{array}\right.$$

Ecuaciones de segundo grado

Recuerda

Una ecuación de segundo grado es de la forma: $ax^2+bx+c=0$, tal que $a\neq 0$.

Les soluciones de la ecuación de segundo grado son: $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}\right.$.

Llamamos discriminante y lo representamos por: $\Delta=b^2-4ac$.

El número de soluciones de la ecuación depende del signo del discriminante:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Si } \Delta>0 & \text{la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes (existe la raíz cuadrada)} \\ \text{Si } \Delta=0 & \text{la ecuación tiene una solució real doble (la raíz cuadrada és cero)} \\ \text{Si } \Delta<0 & \text{la ecuación no tiene solución real (la raíz cuadrada no existe)} \end{array}\right.$$

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2-4x+1=0$ b) $x^2-4x=0$ c) $2x^2-18=0$

SOLUCIONES:

a) La ecuación $3x^2-4x+1=0$ tiene todos los coeficientes distintos de cero. Para resolverla aplicamos la fórmula:
$a=3, b=-4, c=1$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4.3.1}}{2.3}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}=\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{4+2}{6}=1 \\ x=\dfrac{4-2}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Las soluciones son $\boxed{x=1}$, $\boxed{x=\frac{1}{3}}$

b) Una ecuación de segundo grado con una incógnita es incompleta si los coeficientes b o c son cero.
La ecuación $x^2 - 4x = 0$ no tiene término independiente, c = 0.
Para resolverla sacamos la incógnita x factor común:

$x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-4) = 0$

Un producto es cero si uno de los factores es cero.
Entonces,
$x = 0$, o bien $x - 4 = 0$
Resolvemos la segunda ecuación $x = 4$. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones $\boxed{x = 0}$ y $\boxed{x = 4}$

c) La ecuación $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta. No tiene término de grado primer, b = 0. Despejamos x^2 después calcularemos la raíz cuadrada:

$2x^2 - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x^2 - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad x^2 = 9$

Calculando la raíz cuadrada:
$x = \pm\sqrt{9}$ Las soluciones de la ecuación son $\boxed{x = 3}$, $\boxed{x = -3}$

Las ecuaciones b) y c) se podrían resolver mediante la fórmula.

Ecuaciones bicuadradas:

Una ecuación bicuadrada es una ecuación de cuarto grado de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, los coeficientes de tercer y primer grado son cero.
Para resolver la ecuación efectuaremos el cambio de variable $z = x^2$

Ejercicio:
Resuelve la ecuación bicuadrada $x^4 - 13x^2 - 48 = 0$
Efectuamos el cambio $z = x^2$, entonces $z^2 = x^4$
La ecuación se transformaría:
$z^2 - 13z - 48 = 0$
Resolvemos la ecuación:
$a = 1, b = -13, c = -48$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 192}}{2} = \frac{13 \pm 19}{2} \begin{cases} z = \frac{32}{2} = 16 \\ z = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio:
Si $z = 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16$, resolvemos la ecuación: $x = \pm 4$
Si $z = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -3$, esta ecuación no tiene solución.
Por tanto, las soluciones de la ecuación son $\boxed{x = 4}$, $\boxed{x = -4}$

Ecuaciones de grado superior a 2 con 1 incógnita.

Método de resolución:
Igualaremos la ecuación a cero.
Factorizaremos el polinomio (utilizando la regla de Ruffini y el teorema del resto).
Igualaremos cada polinomio factor a cero.
Resolveremos la ecuación.

Ejercicio:
Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^5 + 3x^4 - 4x^3 + (x+3)^2 = x^4 + 2x^3 + 9x^2 + x + 3$$

Efectuamos operaciones:

$$x^5 + 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 9 = x^4 + 2x^3 + 9x^2 + x + 3$$

Igualemos a cero la ecuación:

$$x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 5x + 6 = 0$$

Para factorizar el polinomio calcularemos los ceros (soluciones de la ecuación).
Probaremos con los divisores del término independiente que son $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$

	1	2	–6	–8	5	6
1		1	3	–3	–11	–6
	1	3	–3	–11	–6	$\boxed{0}$
–1		–1	–2	5	6	
	1	2	–5	–6	$\boxed{0}$	
–1		–1	–1	6		
	1	1	–6	$\boxed{0}$		
2		2	6			
	1	3	$\boxed{0}$			
–3		–3				
	1	$\boxed{0}$				

Factorizamos el polinomio

$$(x-1)(x+1)^2(x-2)(x+3) = 0$$

Igualando cada factor a cero, obtenemos las soluciones que son:
$x = 1, x = -1, x = -1, x = 2, x = -3$ que son los ceros o raíces del polinomio.

Ecuaciones racionales con una incógnita

Una ecuación se llama racional si tiene fracciones con incógnitas en los denominadores.

Método de resolución:
Quitar denominadores
Resolver la ecuación resultante.
Comprobar que las soluciones no anulan algún denominador. (En este caso la solución es válida).

Resuelve la ecuación racional:

$$\frac{2x+1}{x+4}-7=\frac{6-2x^2}{x+4}$$

Multiplicamos las dos partes de la ecuación por el mcm de los denominadores que es $x+4$

$$(x+4)\left(\frac{2x+1}{x+4}-7\right)=(x+4)\left(\frac{6-2x^2}{x+4}\right)$$

$$2x+1-7(x+4)=6-2x^2$$

$$2x+1-7x-28=6-2x^2$$

Escribimos la ecuación de segundo grado en forma general:

$$2x^2-5x-33=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot(-33)}}{2\cdot 2}=\begin{cases}\dfrac{5+17}{4}=\dfrac{11}{2}\\[2mm] \dfrac{5-17}{4}=-3\end{cases}$$

Les dos soluciones son válidas porque no anulan ningún denominador de la ecuación inicial.

Ecuaciones irracionales con una incógnita.

Una ecuación es irracional si tiene incógnitas dentro del radicando de alguna raíz cuadrada.

Método de resolución:
Despejamos un radical.
Elevar al cuadrado las dos partes de la igualdad.
Resolver la ecuación resultante.
Comprobar que la solución o soluciones satisfacen la ecuación inicial.

Ejercicio:

Resuelve la ecuación: $3x-\sqrt{5+x}=6x+1$

Despejamos el radical:

$$-\sqrt{5+x}=6x+1-3x$$

$$-\sqrt{5+x}=3x+1$$

Elevemos al cuadrado ambas partes de la ecuación.

$$\left(-\sqrt{5+x}\right)^2=(3x+1)^2$$

Efectuemos operaciones:

$5+x=9x^2+6x+1$

Escribimos la ecuación de segundo grado en forma general:

$9x^2+5x-4=0$

Resolvemos la ecuación:

$$x=\frac{-5+\sqrt{5^2-4\cdot 9\cdot(-4)}}{2\cdot 9}=\begin{cases}\dfrac{-5+13}{18}=\dfrac{4}{9}\\ \dfrac{-5-13}{18}=-1\end{cases}$$

Probemos si las soluciones anteriores satisfacen la ecuación inicial:

$x=\frac{4}{9}$, $\quad 3\cdot\frac{4}{9}-\sqrt{5+\frac{4}{9}}\neq 6\cdot\frac{4}{9}+1$ por tanto no es solución.

$x=-1$, $\quad 3\cdot(-1)-\sqrt{5-1}=6\cdot(-1)+1$ por tanto es solución.

Sistemas de ecuaciones no lineales con dos incógnitas.

Un sistema es no lineal si alguna o les dos ecuaciones son de grado mayor o igual a 2.

No hay método general de resolución.

Ejercicios:

a) Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases}x+y=12\\ xy=-45\end{cases}$$

Notemos que la segunda ecuación es de segundo grado.

De la primera ecuación despejamos la incógnita x, y sustituimos su valor en la segunda ecuación:

$$\begin{cases}x=12-y\\ (12-y)y=-45\end{cases}$$

Efectuamos operaciones en la segunda ecuación:

$$\begin{cases}x=12-y\\ 12y-y^2=-45\end{cases}$$

La segunda ecuación es de segundo grado en la incógnita y. Resolvámosla:

$$\begin{cases}x=12-y\\ y^2-12y-45=0\end{cases}\qquad \begin{cases}x=12-y\\ y=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 1\cdot(-45)}}{2}=\dfrac{12\pm 18}{2}\end{cases}$$

La incógnita y tiene 2 soluciones entonces el sistema tiene 2 soluciones:

1ª solución: $\begin{cases}x=-3\\ y=15\end{cases}$ la 2ª solución $\begin{cases}x=15\\ y=-3\end{cases}$