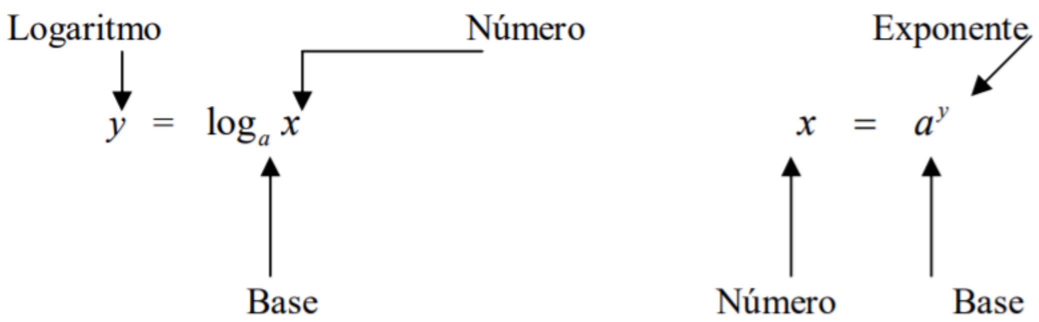
V. LOGARITMOS

En la siguiente figura se ilustra la relación entre la notación de logaritmos y la notación exponencial:



La definición de logaritmo es la siguiente: Para todos los números positivos **a**, donde **a ≠1**,

$$y = \log_a x \qquad \text{significa} \qquad a^y = x$$

En palabras, el logaritmo del número **x** en la base **a** es el exponente al que debe elevarse la base **a** para obtener el número **x.**

En la expresión **$\log_a y = x$** la palabra **log** es una abreviatura de la palabra logaritmo, la letra **a** representa la base y la letra **x** representa el número cuyo logaritmo se desea obtener.

Por ejemplo, escribir **$2 = \log_{10} 100$** significa **$10^2 = 100$.**

Aquí, el logaritmo es 2, la base es 10 y el número cuyo logaritmo se desea es 100. En otras palabras, el logaritmo 2 es el exponente al que hay que elevar la base, 10, para obtener el número 100.

Las siguientes expresiones exponenciales y logarítmicas son equivalentes:

1.)	$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
2.)	$4^2 = 16$	$\log_4 16 = 2$
3.)	$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$
4.)	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$	$5^{-2} = \frac{1}{25}$
5.)	$\log_3 81 = 4$	$3^4 = 81$

Como consecuencias de la definición de logaritmo, se pueden deducir estas **identidades:**

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

1.) $\log_a a^x = x$

2.) $a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0)$

Ejemplos:

1.) $\log_6 6^5 = 5$

2.) $\log_6 6^x = x$

3.) $3^{\log_3 7} = 7$

4.) $5^{\log_5 x} = x \qquad (x > 0)$

5.1. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1) Logaritmo de un producto: $\boxed{\log_a(M \cdot C) = \log_a(M) + \log_a(C)}$

Ejemplos: calcule cada lado por separado, y compare:

a) $\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 32 =$ $\qquad$ $\log_2 8 + \log_2 4 =$

b) $\log(17 \cdot 4) = \log 68 =$ $\qquad$ $\log 17 + \log 4 =$ $\qquad$ (use calculadora)

2) Logaritmo de un cuociente: $\boxed{\log_a\left(\frac{M}{C}\right) = \log_a(M) - \log_a(C)}$

Ejemplos: calcule cada lado por separado, y compare:

a) $\log_2\left(\frac{32}{4}\right) =$ $\qquad$ $\log_2 32 - \log_2 4 =$

b) $\log\left(\frac{17}{4}\right) =$ $\qquad$ $\log 17 - \log 4 =$ $\qquad$ (use calculadora)

3) Logaritmo de una potencia: $\boxed{\log_a(M^t) = t \log_a(M)}$

Ejemplos:

a) $\log_2\left(2^5\right) = \log_2 32 =$ $\qquad$ $5 \log_2 2 =$

b) $\log(3^5) =$ $\qquad$ $5 \log 3 =$

c) Calcule $\qquad \log_2(8) =$ $\qquad$ $\log_2\left(8^9\right) =$

4) Logaritmos de números particulares

$\log_a(a)=1$	$\log_a 1 = 0$

Ejemplos:

a) $\log_5(5)=$ b) $\log 10=$ c) $\log_5 1=$ d) $\log 1=$

e) $\log_5(5^{12})=$ f) $\log(10^7)=$ g) $\log_3\sqrt{3}=$ h) $\log_2\left(\frac{1}{2^5}\right)=$

5) Cambio de base

$\log_a(M)=\dfrac{\log_b(M)}{\log_b(a)}$	$\log_a(M)=\dfrac{\log(M)}{\log(a)}$

Nota: Para calcular el logaritmo de un número en la base a, en general, se hace cambio de base. Usualmente de utiliza como *nueva base* la base 10. (También se puede usar la base e).

Ejemplos: Use cambio de base para calcular cada logaritmo (nueva base: 10).

a) $\log_2(32)=$ b) $\log_5 137=$

5.1.1. EJEMPLOS DE OPERACIONES CON LOGARITMOS.

1.) $\log_4 3+\log_4 5=\log_4(3\bullet 5)=\log_4 15$

2.) $\log_6\frac{7}{8}=\log_6 7-\log_6 8$

3.) $\ln x-\ln 4=\ln\left(\frac{x}{4}\right)$

4.) $\log_5\left(\frac{12x}{3y}\right)=\log_5(12x)-\log_5(3y)$

$=(\log_5 12+\log_5 x)-(\log_5 3+\log_5 y)$

$=\log_5 12+\log_5 x-\log_5 3-\log_5 y$

5.) $3\log_2 5=\log_2(5^3)=\log_2 125$

6.) $\log\frac{4y^3}{x^2}=\log(4y^3)-\log(x^2)$

$=(\log 4+\log y^3)-\log(x^2)$

$=(\log 4+3\log y)-2\log x$

$=\log 4+3\log y-2\log x$

5.1.2. PROCEDIMIENTO PARA CAMBIAR LOGARITMOS DE UNA BASE A OTRA.

El concepto de cambio de base se deriva de la definición de logaritmo.

EJEMPLO: encontrar el logaritmo de 39 en base 2, a partir de su logaritmo en base 10. Para ello, se plantea la incógnita a encontrar, **x**:

$$x = \log_2 39$$

o, por la definición de logaritmo

$$2^x = 39$$

al aplicar el logaritmo (base 10) en la expresión anterior y tomando en cuenta la ley de la potencia, se obtiene

$$\log 2^x = x(\log 2) = \log 39$$

y resulta que:

$$x = \frac{\log 39}{\log 2}$$

de donde se puede encontrar x con ayuda de tablas o de una calculadora,

$$x = \frac{\log 39}{\log 2} = \frac{1.591065...}{0.301030...} = 5.285402...$$

de modo que

$$\log_2 39 = 5.285402...$$

El procedimiento anterior se puede generalizar fácilmente para mostrar que:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

que es la expresión que permite encontrar el logaritmo de un número x en la base b si se conocen el logaritmo de ese mismo número y el de b, en cualquier otra base.

Ejemplos:

1.) Para obtener $\log_7 81$, sabiendo que $\log_3 81 = 4$ y $\log_3 7 = 1.771244...$, se aplica la fórmula indicada:

$$\log_7 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 7} = \frac{4}{1.771244...} = 2.258300...$$

2.) Para obtener log 0.35, sabiendo que ln 0.35 = –0.049822... y ln 10 = 2.302585..., de acuerdo con la fórmula dada se calcula:

$$\log 0.35 = \frac{\ln 0.35}{\ln 10} = \frac{-1.049822...}{2.302585...} = -0.455932...$$

3.) Para obtener ln 5.76, sabiendo que log 5.76 = 0.760422... y log e = 0.434294..., se procede igual que en los casos anteriores:

$$\ln 5.76 = \frac{\log 5.76}{\log e} = \frac{0.760422...}{0.434294...} = 1.750938...$$

5.1.3. RESOLVERÁS ECUACIONES QUE INVOLUCREN LOGARITMOS:

Para resolver este tipo de ecuaciones, generalmente se deben aplicar las leyes de los logaritmos para que la incógnita aparezca en un único logaritmo y, luego, recurrir a la definición de logaritmo para eliminar a éste. El resto del procedimiento consiste en resolver la ecuación resultante en forma usual. Sin embargo, es necesario cuidar que la solución obtenida respete las propiedades de los logaritmos, particularmente la de que no existen logaritmos de números negativos ni el logaritmo de cero.

Ejemplos:

1.) Para obtener el valor de x en la ecuación

$$\log 4x = 3\log 2 + 4\log 3$$

se aplican las leyes de logaritmos para dejar:

$$\log 4x = \log 2^3 + \log 3^4$$

$$= \log\left(2^3 \bullet 3^4\right) = \log(8 \bullet 81)$$

$$\log 4x = \log 648$$

entonces, al tomar la definición de logaritmo queda

$$10^{4x} = 10^{648}$$

y, de aquí:

$$4x = 648$$

$$x = \frac{648}{4} = 162$$

2.) Para obtener el valor de x en la ecuación

$$\log_2 x - 3\log_2 x = 2$$

se aplican las leyes de logaritmos y:

$$\log_2 x - \log_2 x^3 = 2$$

$$\log_2 \frac{x}{x^3} = 2$$

$$\log_2 \frac{1}{x^2} = 2$$

de acuerdo con la definición de logaritmo:

$$\frac{1}{x^2} = 2^2 = 4$$

$$1 = 4x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

A partir de esta última expresión se podrían obtener dos valores para x:

$$x = 1/2 \quad \text{o} \quad x = -1/2$$

pero el valor negativo no se puede aceptar, puesto que en la ecuación original se tiene $\log_2 x$ y, como se indicó anteriormente, los números negativos no tienen logaritmos.

Por lo tanto, la solución es:

$$x = 1/2$$

3.) Para obtener el valor de x en la ecuación

$$\frac{\ln\left(2x^2 - 4\right)}{\ln\left(x-4\right)} = 2$$

se reescribe

$$\ln\left(2x^2 - 4\right) = 2\left[\ln\left(x-4\right)\right]$$

se aplica la ley de la potencia

$$\ln\left(2x^2-4\right)=\ln\left(x-4\right)^2$$

y la definición de logaritmo para obtener que:

$$e^{\left(2x^2-4\right)}=e^{(x-4)^2}$$

entonces

$$\left(2x^2-4\right)=\left(x-4\right)^2$$

$$2x^2-4=x^2-8x+16$$

$$x^2+8x-20=0$$

De esta última se ecuación se obtiene que $x=2$ o $x=-10$, pero ninguno de los dos valores puede aceptarse porque en la ecuación original el divisor $\ln\left(x-4\right)$, quedaría como $\ln\left(-2\right)$ o $\ln\left(-14\right)$. Por tanto, la ecuación no tiene solución (en los números reales).

APENDICE:
Utilizamos la notación del logaritmo natural o neperiano **(ln)** pero los cálculos son válidos para cualquier base (siempre que no se cambie de base).

Adición/resta

$\ln(m + n) = \ln(e^x + e^y)$; es decir $\ln(m + n)$ NO ES $\ln(m) + \ln(n)$, sino que hay que dejarlo tal cual.

multiplicación/división

$\ln(m \cdot n) = \ln(m) + \ln(n)$

$\ln(m/n) = \ln(m) - \ln(n)$

potencias/raíces

$\ln(m^n) = n \cdot \ln(m)$

$\ln(m^{1/n}) = (1/n) \cdot \ln(m)$

EJEMPLO:

sea:

$$N = \frac{A^3 \sqrt[5]{B^2}}{\sqrt{\left(\frac{C}{D}\right)^{\frac{3}{7}}}}$$

Se opera: primero con las potencias/raíces y después con las multiplicaciones/divisiones

a) logaritmo del numerador	3 ln(A) + 2/5ln(B)
b) logaritmo del denominador	(3/7)*(1/2) (ln(C) - ln(D)) = 3/14ln(C) –3/14ln(D)
c) logaritmo de N	3 ln(A) + 2/5ln(B) – (3/14ln(C) –3/14ln(D))

APLICACIONES EN EL PROCESO DE COMBUTION DE MOTORES:

En un caso donde la combustión es incompleta y a diferencia de los casos de combustión completa, para su solución se requiere junto con la reacción de equilibrio conocer la temperatura a la cual las especies formadas se encuentran en equilibrio químico. Debido a que esta teoría se estudiará en el segundo capítulo, por ahora se plantearán la reacción global de combustión

$$\text{Combustible} + a(O_2 + 3.773N_2) \rightarrow bCO_2 + dCO + fH_2O + gH_2 + iN_2$$

Tabla 4. Especies presentes en los gases de escape de MCIA en función de la relación combustible aire equivalente: CHON de seis especies.

ϕ	Productos de combustión
< 1.0	CO_2, H_2O, N_2, O_2
= 1.0	CO_2, H_2O, N_2
> 1.0	CO_2, H_2O, N_2, CO, H_2

$$\phi = \frac{F/A}{(F/A)_T} = \frac{mc/ma}{(mc/ma)_T} = \frac{Ma_T}{Ma} = \frac{1}{1+e} \qquad (6)$$

$$\ln K_{(T)} = \frac{M_{H_2O} M_{CO}}{M_{CO_2} M_{H_2}} = 2.743 - \frac{1.761e3}{T} - \frac{1.611e6}{T^2} + \frac{0.2803e9}{T^3} \qquad (8)$$